Université A/Mira de Béjaia Date : 28/06/2012
Département d'Informatique
3^{e} année Licence Académique (2011/2012).

Examen de rattrapage de Théorie des Graphes
Durée 2 heures

Exercice 1. (07 pts) Soit le graphe suivant :

1. Donner sa matrice d'adjacence. Étudier ses propriétés.
2. Déterminer sa fermeture transitive.
3. Ce graphe est-il sans circuits ? Si oui, construire son noyau et donner sa mise à niveau.

Exercice 2. (03 pts)

1. Montrer que le nombre maximal d'arêtes que peut posséder un graphe simple d'ordre n est $\frac{n(n-1)}{2}$.
2. Soit $G = (X, U)$ un graphe simple ayant n sommets, m arêtes et p composantes connexes. Montrer qu'alors
$$n - p \leq m \leq \tfrac{1}{2}(n-p)(n-p+1).$$

Exercice 3. (03 pts)

1. Soit C un plus court chemin, dans un réseau $R = (X, U, d)$, d'un sommet s à un sommet p et soit C_x^y la portion de ce chemin situé entre deux sommets x et y. Montrer que C_x^y est un plus court chemin de x à y.
2. Soit A_k l'arborescence obtenue à l'itération k de l'algorithme général de Ford. Supposons qu'il existe $u = (x, y) \in U - A_k$ tel que $\delta_u = \Pi(y) - \Pi(x) - d(u) > 0$. Montrer que si $A_k \cup \{u\}$ contient un circuit C, alors il est absorbant.

Exercice 4. (07 pts) Le responsable de la sécurité présidentielle est chargé de tracer l'itinéraire adéquat du président de la république qui devait partir de la ville A, lieu de sa résidence, et rejoindre la ville F pour une visite de travail. Avant de déterminer son itinéraire, le responsable a consulté une voyante (Mme Soleil !) qui lui a dit entre autres choses. ≪ Après la ville B, méfiez-vous du ciel. A la ville C, attention aux bandits. Dans D, méfiez-vous de l'eau et surtout prenez garde partout d'un blond aux yeux vert...≫. Le responsable avait reporté sur une carte pour chaque liaison entre deux villes les ≪chances≫ de réussite de sa mission. La table suivante résume les différentes chances de réussite.

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 0.7 & 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.3 & 0.6 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.8 & 1.0 & 0.9 & 0.6 & 0.0 \\ 0.0 & 0.6 & 0.0 & 1.0 & 0.9 & 0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.9 & 1.0 & 0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Ignorant le calcul des probabilités et les techniques de recherche opérationnelle, il avait choisi l'itinéraire $[A \to B \to D \to F]$.

1. Formuler ce problème. Discuter l'existence de solution à ce problème.
2. Modifier l'algorithme de Dijkstra pour déterminer une solution optimale à ce problème. Comparer la solution obtenue avec celle du responsable de sécurité. Quelle est la probabilité de réussite de la mission du responsable, sous l'hypothèse d'indépendance des variables aléatoires $\ll$ chances de succès $\gg$?

$*$ *$\mathcal{A}$fud igerrzen* $*$ *$\mathcal{B}$on courage* $*$